

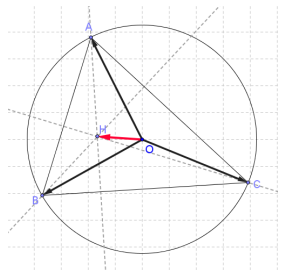
Teorema lui Sylvester

Marian Tache

Liceul Teoretic W. Shakespeare
Timisoara

February 6, 2015

Teorema lui Sylvester

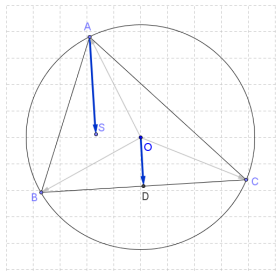


Theorem

Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Teorema lui Sylvester



Theorem

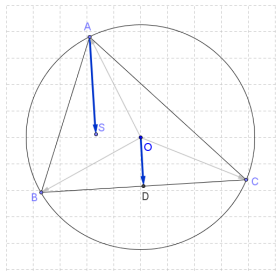
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Proof.

Fie D mijlocul laturii $[BC]$. Exprim vectorul \vec{OD} :

Teorema lui Sylvester



Theorem

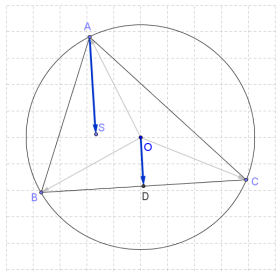
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Fie D mijlocul laturii $[BC]$. Exprim vectorul \overline{OD} : $\overline{OD} = \frac{1}{2} (\overline{OB} + \overline{OC})$.

Teorema lui Sylvester



Theorem

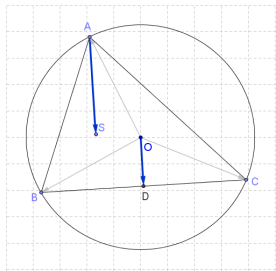
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Proof.

Fie D mijlocul laturii $[BC]$. Exprim vectorul \overrightarrow{OD} : $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
Consider punctul S astfel ca $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{OD} \Rightarrow AS \parallel OD$. Cum $OD \perp BC \Rightarrow AS \perp BC$. Calculez \overrightarrow{OS} :

Teorema lui Sylvester



Theorem

Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

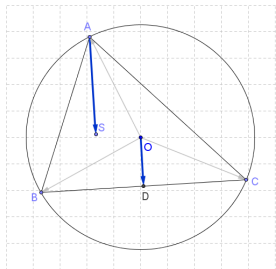
Proof.

Fie D mijlocul laturii $[BC]$. Exprim vectorul \vec{OD} : $\vec{OD} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC})$.

Consider punctul S astfel ca $\vec{AS} = 2\vec{OD} \Rightarrow AS \parallel OD$. Cum

$OD \perp BC \Rightarrow AS \perp BC$. Calculez \vec{OS} : $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS} =$

Teorema lui Sylvester



Theorem

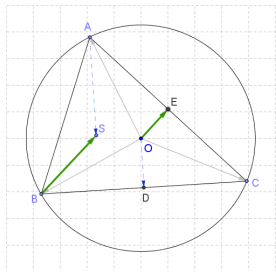
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Fie D mijlocul laturii $[BC]$. Exprim vectorul \overline{OD} : $\overline{OD} = \frac{1}{2} (\overline{OB} + \overline{OC})$.
Consider punctul S astfel ca $\overline{AS} = 2\overline{OD} \Rightarrow AS \parallel OD$. Cum $OD \perp BC \Rightarrow AS \perp BC$. Calculez \overline{OS} : $\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{AS} = \overline{OA} + 2\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. □

Teorema lui Sylvester



Theorem

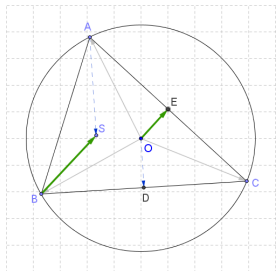
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Fie E mijlocul laturii $[AC]$. Exprim vectorul \overline{OE} :

Teorema lui Sylvester



Theorem

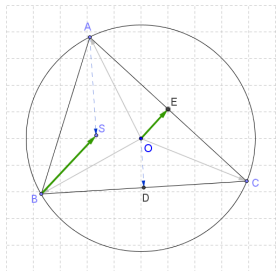
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Fie E mijlocul laturii $[AC]$. Exprim vectorul \overline{OE} : $\overline{OE} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OC})$.

Teorema lui Sylvester



Theorem

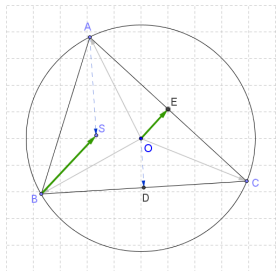
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Fie E mijlocul laturii $[AC]$. Exprim vectorul \overline{OE} : $\overline{OE} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC})$.
Consider punctul S' astfel ca $\overline{BS'} = 2\overline{OE} \Rightarrow BS' \parallel OE$. Cum $OE \perp AC \Rightarrow BS' \perp AC$. Calculez $\overline{OS'}$:

Teorema lui Sylvester



Theorem

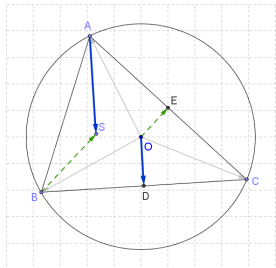
Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Fie E mijlocul laturii $[AC]$. Exprim vectorul \overline{OE} : $\overline{OE} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC})$.
Consider punctul S' astfel ca $\overline{BS'} = 2\overline{OE} \Rightarrow BS' \parallel OE$. Cum $OE \perp AC \Rightarrow BS' \perp AC$. Calculez $\overline{OS'}$: $\overline{OS'} = \overline{OB} + \overline{BS'} = \overline{OB} + 2\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{OC}$. □

Teorema lui Sylvester



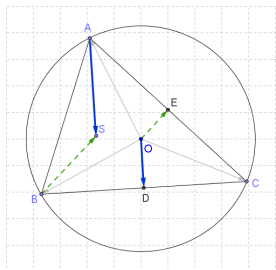
Theorem

Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Teorema lui Sylvester



Theorem

Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

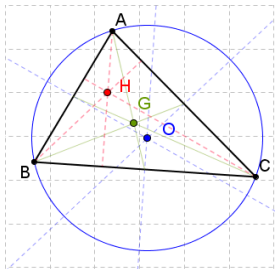
$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Proof.

Așadar, $S = S' = H \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.



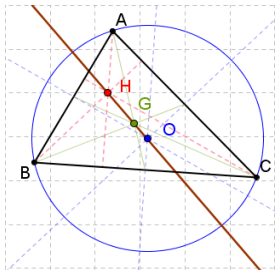
Dreapta lui Euler



Theorem

Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul sunt puncte coliniare. Dreapta pe care se află aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.

Dreapta lui Euler

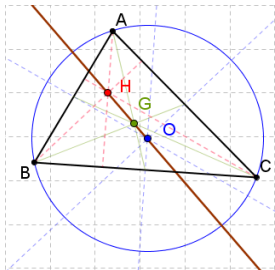


Theorem

Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul sunt puncte coliniare. Dreapta pe care se află aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.

Teorema lui Sylvester - consecințe

Dreapta lui Euler



Theorem

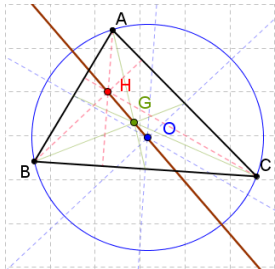
*Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul sunt puncte coliniare. Dreapta pe care se află aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.*

Proof.

Din teorema lui Sylvester avem: $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Teorema lui Sylvester - consecințe

Dreapta lui Euler



Theorem

*Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul sunt puncte coliniare. Dreapta pe care se află aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.*

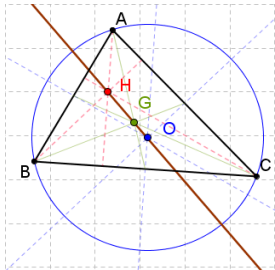
Proof.

Din teorema lui Sylvester avem: $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Din faptul că G este centrul de greutate avem: $3\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Teorema lui Sylvester - consecințe

Dreapta lui Euler



Theorem

*Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul sunt puncte coliniare. Dreapta pe care se află aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.*

Proof.

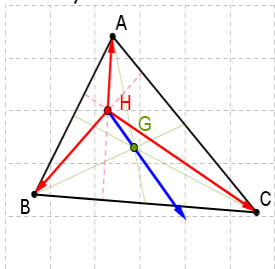
Din teorema lui Sylvester avem: $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Din faptul că G este centrul de greutate avem: $3\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Rezultă $\overline{OH} = 3\overline{OG}$, adică O, G, H coliniare. □

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 1



Theorem

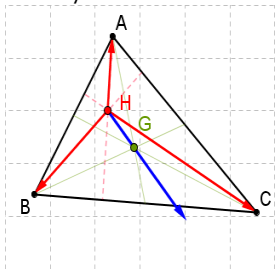
Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG}$.

Proof.

Din proprietatea centrului de greutate avem:

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 1



Theorem

Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG}$.

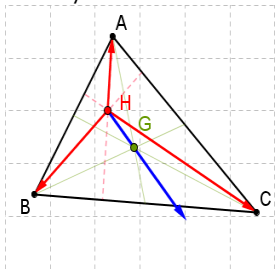
Proof.

Din proprietatea centrului de greutate avem:

$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$ pentru orice punct M din plan.

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 1



Theorem

Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG}$.

Proof.

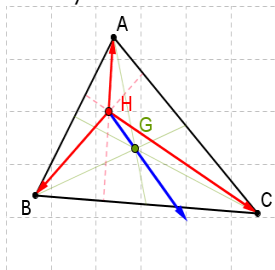
Din proprietatea centrului de greutate avem:

$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$ pentru orice punct M din plan.

Pentru $M = H$ se obține:

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 1



Theorem

Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG}$.

Proof.

Din proprietatea centrului de greutate avem:

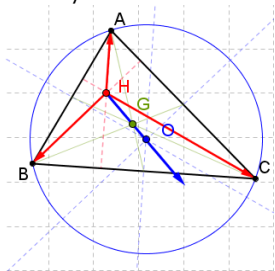
$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$ pentru orice punct M din plan.

Pentru $M = H$ se obține: $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG}$



Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 2



Theorem

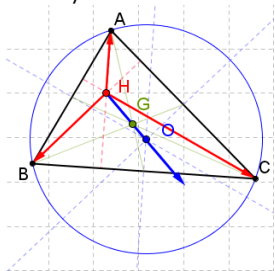
Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$.

Proof.

Din consecința precedentă avem:

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 2



Theorem

Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$.

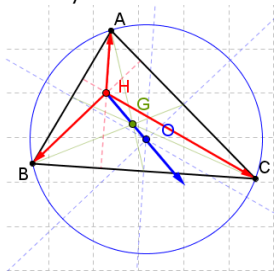
Proof.

Din consecința precedentă avem:

$$\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG} =$$

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 2



Theorem

Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$.

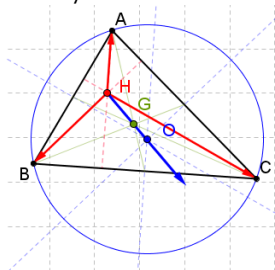
Proof.

Din consecința precedentă avem:

$$\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG} = 3 \cdot \frac{2}{3}\overline{HO} =$$

Teorema lui Sylvester - consecințe

Consecința 2



Theorem

Într-un triunghi are loc relația:
 $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$.

Proof.

Din consecința precedentă avem:

$$\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG} = 3 \cdot \frac{2}{3}\overline{HO} = 2\overline{HO}$$

