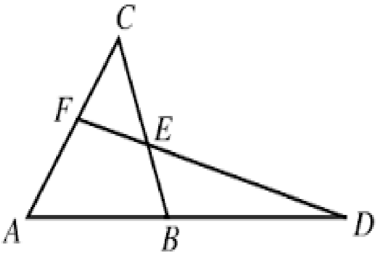
Teorema lui Menelaus

Marian Tache

Liceul Teoretic W. Shakespeare
Timisoara

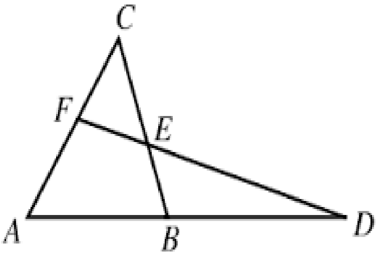
March 30, 2015

Teorema lui Menelaus



Theorem

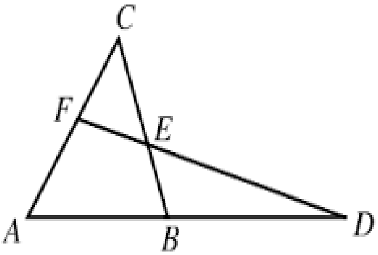
Teorema lui Menelaus:



Theorem

Teorema lui Menelaus:

Se dă triunghiul ABC. Dreapta d intersectează dreptele AB, BC, CA în punctele D, E, F.



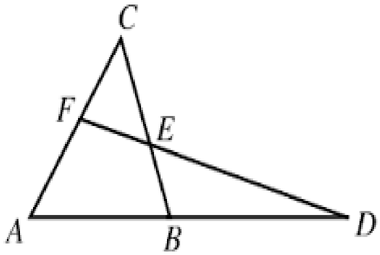
Theorem

Teorema lui Menelaus:

Se dă triunghiul ABC*. Dreapta* d *intersectează dreptele* AB, BC, CA *în punctele* D, E, F.
Atunci are loc relația:

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1.$$

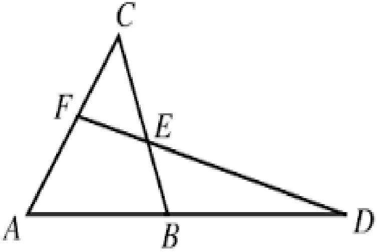
Reciproca teoremei lui Menelaus



Theorem

Reciproca teoremei lui Menelaus:

Reciproca teoremei lui Menelaus

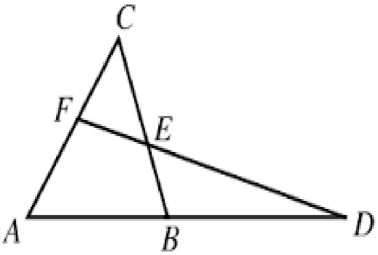


Theorem

Reciproca teoremei lui Menelaus:

Se dă triunghiul ABC*. Pe dreptele* AB, BC, CA *se consideră punctele* D, E, F*. astfel ca* $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$.

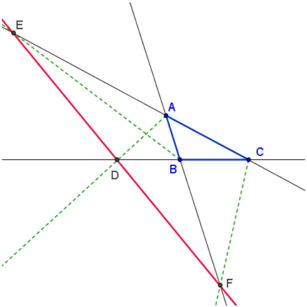
Reciproca teoremei lui Menelaus



Theorem

Reciproca teoremei lui Menelaus:

Se dă triunghiul ABC. Pe dreptele AB, BC, CA se consideră punctele D, E, F. astfel ca $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$. Atunci punctele D, E, F sunt coliniare.

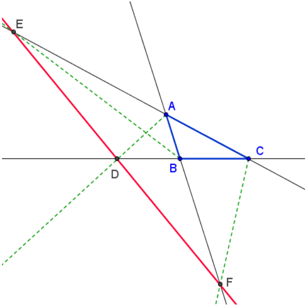


În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se

arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

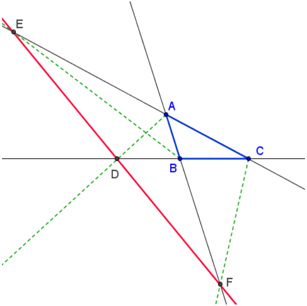
E1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

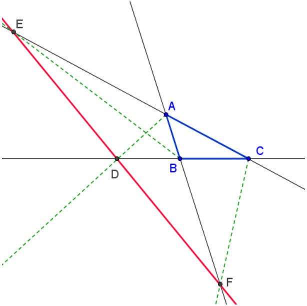
Aplic teorema bisectoarei exterioare:



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:
Pentru bisectoarea $[AD$:



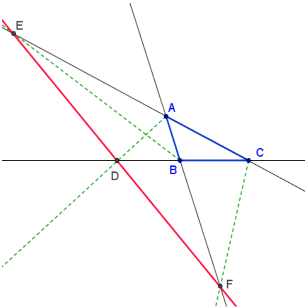
În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se

arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:
Pentru bisectoarea $[AD$: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

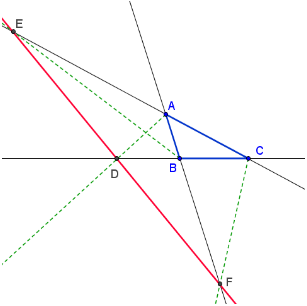
E1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se
arate că punctele D, E, F sunt coliniare.
Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:
Pentru bisectoarea $[AD$: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$
Pentru bisectoarea $[BE$:

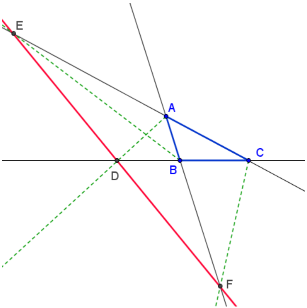
E1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se
arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:
Pentru bisectoarea $[AD : \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$
Pentru bisectoarea $[BE : \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se

arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

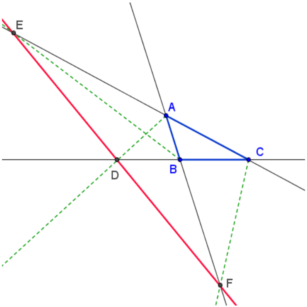
Aplic teorema bisectoarei exterioare:

Pentru bisectoarea $[AD : \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Pentru bisectoarea $[BE : \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$

Pentru bisectoarea $[CF :$

E1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se

arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

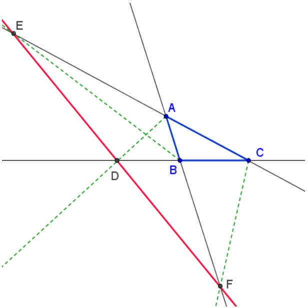
Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:

Pentru bisectoarea $[AD : \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Pentru bisectoarea $[BE : \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$

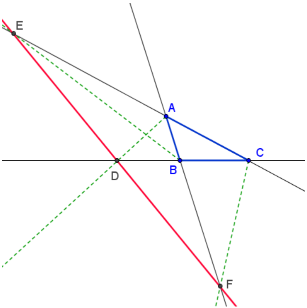
Pentru bisectoarea $[CF : \frac{FB}{FA} = \frac{CB}{CA}$



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se
arate că punctele D, E, F sunt coliniare.
Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:
Pentru bisectoarea $[AD : \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$
Pentru bisectoarea $[BE : \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$
Pentru bisectoarea $[CF : \frac{FB}{FA} = \frac{CB}{CA}$
Înmulțind convenabil
$\Rightarrow 1 = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} =$

E1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:

Pentru bisectoarea $[AD : \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Pentru bisectoarea $[BE : \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$

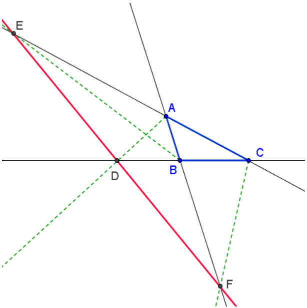
Pentru bisectoarea $[CF : \frac{FB}{FA} = \frac{CB}{CA}$

Înmulțind convenabil

$\Rightarrow 1 = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} =$

$= \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA}$(Reciproca T. Menelaus) $\Rightarrow$

E1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul neisoscel ABC semidreptele $[AD$, $[BE$, $[CF$ sunt bisectoare exterioare, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Să se

arate că punctele D, E, F sunt coliniare.

Demonstrație

Aplic teorema bisectoarei exterioare:

Pentru bisectoarea $[AD : \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Pentru bisectoarea $[BE : \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$

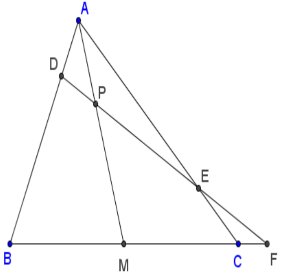
Pentru bisectoarea $[CF : \frac{FB}{FA} = \frac{CB}{CA}$

Înmulțind convenabil

$\Rightarrow 1 = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} =$

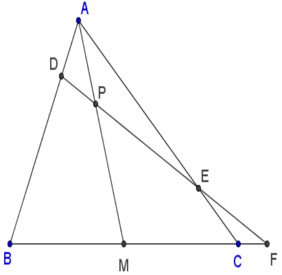
$= \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA}$(`Reciproca T. Menelaus`) $\Rightarrow$ punctele D, E, F sunt coliniare.

E3/ pg. 233, manual M. Burtea



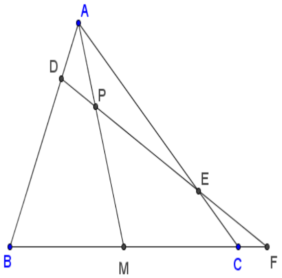
În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în care dreapta DE împarte mediana din A.
Soluție

E3/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul
ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$
astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în
care dreapta DE împarte mediana din A.
Soluție

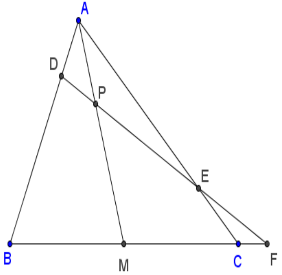
Consider $\{F\} = BC \cap DE$.
Aplic Teorema lui Menelaus pentru
triunghiul ABC și transversala DE :



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în care dreapta DE împarte mediana din A.
Soluție

Consider $\{F\} = BC \cap DE$.
Aplic Teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC și transversala DE :

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FC} =$$



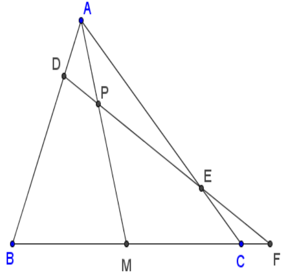
În triunghiul
ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$
astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în
care dreapta DE împarte mediana din A.

Soluție

Consider $\{F\} = BC \cap DE$.
Aplic Teorema lui Menelaus pentru
triunghiul ABC și transversala DE :

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 9 \Rightarrow \frac{FB}{FM} =$$

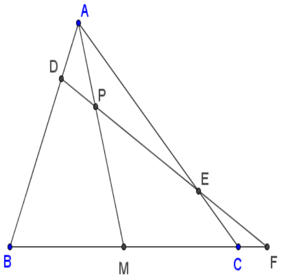
E3/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul
ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$
astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în
care dreapta DE împarte mediana din A.
Soluție

Consider $\{F\} = BC \cap DE$.
Aplic Teorema lui Menelaus pentru
triunghiul ABC și transversala DE :
$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 9 \Rightarrow \frac{FB}{FM} = \frac{9}{5}$. Aplic teorema lui Menelaus
pentru $\triangle ABM$ și transversala DF :

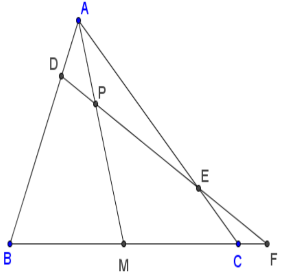
E3/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în care dreapta DE împarte mediana din A.
Soluție

Consider $\{F\} = BC \cap DE$.
Aplic Teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC și transversala DE :
$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 9 \Rightarrow \frac{FB}{FM} = \frac{9}{5}$. Aplic teorema lui Menelaus pentru $\triangle ABM$ și transversala DF : $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FM} \cdot \frac{PM}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PM} =$

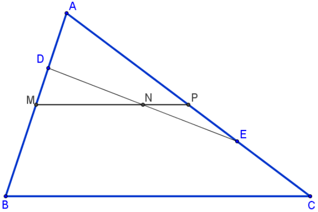
E3/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$.
Să se afle raportul în care dreapta DE împarte mediana din A.
Soluție

Consider $\{F\} = BC \cap DE$.
Aplic Teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC și transversala DE :
$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 9 \Rightarrow \frac{FB}{FM} = \frac{9}{5}$. Aplic teorema lui Menelaus pentru $\triangle ABM$ și transversala DF : $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{FB}{FM} \cdot \frac{PM}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{3}{5}$.

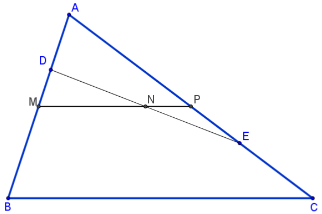
A1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.

Soluție

A1/ pg. 233, manual M. Burtea

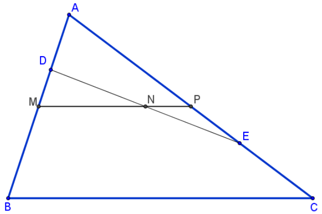


În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.

Soluție

Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :

A1/ pg. 233, manual M. Burtea

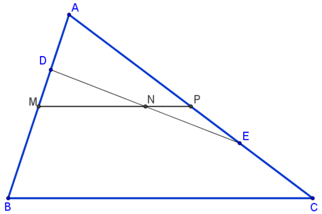


În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :

$\frac{MD}{MA} =$

A1/ pg. 233, manual M. Burtea



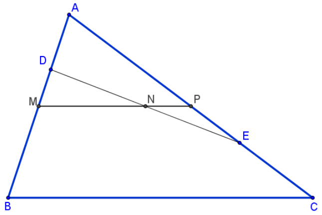
În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.

Soluție

Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :

$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$.

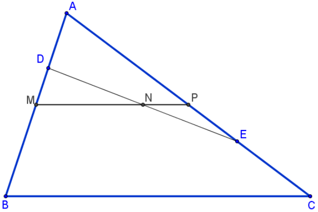
A1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :

A1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.

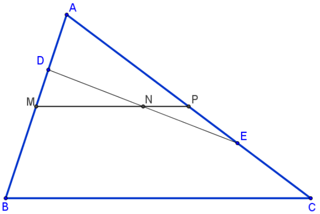
Soluție

Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :

$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :

$\frac{PA}{PE} =$

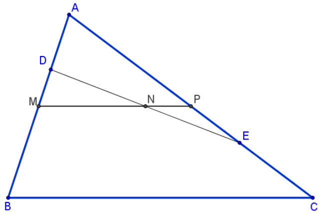
A1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :
$\frac{PA}{PE} = \frac{1+k}{1-k}$.

A1/ pg. 233, manual M. Burtea

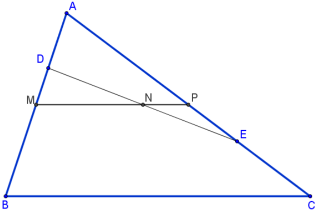


În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.

Soluție

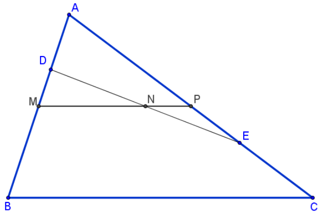
Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :
$\frac{PA}{PE} = \frac{1+k}{1-k}$. Aplic teorema lui Menelaus $\triangle ADE$ și transversalei MP :

A1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

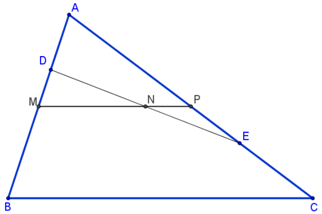
Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :
$\frac{PA}{PE} = \frac{1+k}{1-k}$. Aplic teorema lui Menelaus $\triangle ADE$ și transversalei MP :
$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{PA}{PE} = 1$.



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

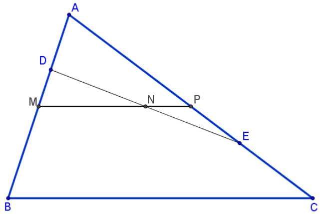
Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :
$\frac{PA}{PE} = \frac{1+k}{1-k}$. Aplic teorema lui Menelaus $\triangle ADE$ și transversalei MP :
$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{PA}{PE} = 1$. Înlocuiesc valorile rapoartelor cunoscute și exprim raportul $\frac{NE}{ND} =$

A1/ pg. 233, manual M. Burtea



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

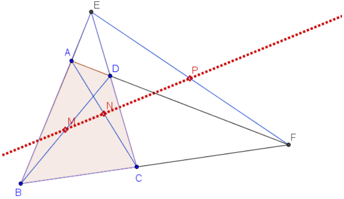
Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :
$\frac{PA}{PE} = \frac{1+k}{1-k}$. Aplic teorema lui Menelaus $\triangle ADE$ și transversalei MP :
$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{PA}{PE} = 1$. Înlocuiesc valorile rapoartelor cunoscute și exprim raportul $\frac{NE}{ND} = 1 \Rightarrow$



În triunghiul ABC se consideră $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel ca $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[DE]$, $[AC]$ sunt puncte coliniare.
Soluție

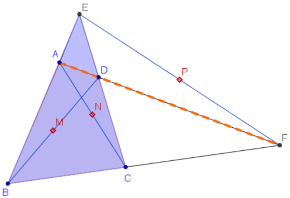
Consider M, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, iar $\{N\} = MP \cap DE$. Notez $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA} = k$. Exprim raportul $\frac{MD}{MA}$ în funcție de k :
$\frac{MD}{MA} = \frac{1-k}{1+k}$. Exprim raportul $\frac{PA}{PE}$ în funcție de k :
$\frac{PA}{PE} = \frac{1+k}{1-k}$. Aplic teorema lui Menelaus $\triangle ADE$ și transversalei MP :
$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{PA}{PE} = 1$. Înlocuiesc valorile rapoartelor cunoscute și exprim raportul $\frac{NE}{ND} = 1 \Rightarrow N-$ mijlocul $[DE]$.

Dreapta lui Gauss



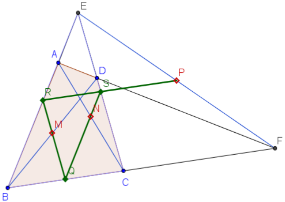
Mijloacele diagonalelor
unui patrulater complet sunt coliniare.
Definiție: Dacă avem
un patrulater *ABCD* convex care nu face parte din "categoria paralelogramelor" (paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat) și nu este nici trapez, atunci, prelungind laturile opuse acestea se intersectează, notăm cu E și F. Configurația obținută
și notată *ABCDEF* se numește patrulater complet.

Dreapta lui Gauss



Mijloacele diagonalelor
unui patrulater complet sunt coliniare.
Definiție: Dacă avem
un patrulater $ABCD$ convex care nu face parte din ”categoria paralelogramelor” (paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat) și nu este nici trapez, atunci, prelungind laturile opuse acestea se intersectează, notăm cu E și F. Configurația obținută
și notată $ABCDEF$ se numește patrulater complet.

Dreapta lui Gauss



Mijloacele diagonalelor
unui patrulater complet sunt coliniare.
Definiție: Dacă avem
un patrulater *ABCD* convex care nu face parte din "categoria paralelogramelor" (paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat) și nu este nici trapez, atunci, prelungind laturile opuse acestea se intersectează, notăm cu E și F. Configurația obținută
și notată *ABCDEF* se numește patrulater complet.