Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $a > 0$ şi funcţia $f : [0, \infty) \to [0, a]$, continuă pe $(0, \infty)$ şi cu proprietatea lui Darboux pe $[0, \infty)$. Să se arate că, dacă $f(0) = 0$ şi

$$xf(x) \geq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, \infty),$$

atunci f are primitive pe $[0, \infty)$.

Subiectul 2. Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata f' continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că, dacă $f(1/2) = 0$, atunci

$$\int_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x \geq 12 \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right)^2 .$$

Subiectul 3. Fie A un inel finit cu n elemente, cu proprietatea că ecuaţia $x^n = 1$ are soluţie unică, $x = 1$. Să se arate că:

(a) 0 este unicul element nilpotent al inelului A;

(b) există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât ecuaţia $x^k = x$ are n soluţii în A.

($x \in A$ este *nilpotent* dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = 0$.)

Subiectul 4. Fie $\mathcal{G}$ mulţimea grupurilor finite cu cel puţin două elemente.

(a) Să se arate că, dacă $G \in \mathcal{G}$, atunci

$$|\mathrm{End}(G)| \leq \sqrt[p]{n^n},$$

unde $|\mathrm{End}(G)|$ este numărul endomorfismelor lui G, $n = n(G)$ este numărul elementelor lui G, iar $p = p(G)$ este cel mai mare divizor prim al lui n.

(b) Să se determine grupurile din $\mathcal{G}$ pentru care inegalitatea de la punctul (a) este egalitate.

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.