Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu proprietatea că pentru orice $x \in (0, \infty)$ şirul $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.

Demonstraţi că f este crescătoare.

Subiectul 2. Demonstraţi că o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $A^{-1} = \overline{A}$, dacă şi numai dacă există o matrice inversabilă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = B^{-1} \cdot \overline{B}$.

Subiectul 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru care există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq f'(c), \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b.$$

Demonstraţi că $f''(c) = 0$.

Subiectul 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică ($\forall i, j,\ a_{ij} + a_{ji} = 0$). Demonstraţi că pentru orice $x, y \in [0, \infty)$ are loc inegalitatea:

$$\det(A + xI_n) \cdot \det(A + yI_n) \geq \det(A + \sqrt{xy}I_n)^2.$$

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.