Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$, astfel încât
$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$
Demonstraţi că, dacă centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor DEF şi ABC coincid, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Subiectul 2. Fie a, b, c trei numere complexe, astfel încât
$$a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0.$$
Demonstraţi că
$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

Subiectul 3. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2008\}$. Vom spune că o mulţime este de tip r, $r \in \{0, 1, 2\}$, dacă este o submulţime nevidă a lui A şi suma elementelor sale dă restul r la împărţirea cu 3. Notăm cu X_r, $r \in \{0, 1, 2\}$ clasa mulţimilor de tip r.

Determinaţi care dintre clasele X_r, $r \in \{0, 1, 2\}$, este cea mai numeroasă.

Subiectul 4. Considerăm propoziţia $p(n):\ (n^2+1)|n!,\ n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că mulţimile
$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ este adevărată}\} \text{ şi } F = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ este falsă}\}$$
sunt infinite.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.