Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Un tetraedru are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât produsul lungimilor oricăror două muchii opuse este egal cu 6. Arătaţi că tetraedrul este o piramidă triunghiulară regulată în care muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsura mai mare sau egală cu 30°.

Subiectul 2. a) Numim *succesiune admisibilă* o înşiruire de patru cifre pare în care nicio cifră nu apare de trei sau patru ori. Determinaţi numărul de succesiuni admisibile.

b) Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 2$, notăm cu d_n numărul de posibilităţi de a completa cu cifre pare un tablou de n linii şi 4 coloane, respectând condiţiile următoare:

i) oricare linie este o succesiune admisibilă;

ii) succesiunea admisibilă 2,0,0,8 ocupă o singură linie a tabloului.

Determinaţi valorile lui n pentru care numărul $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ este întreg.

Subiectul 3. Fie $a, b \in [0,1]$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{1+a+b} \leq 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}.$$

Subiectul 4. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile $(A'D')$, $(A'B')$ şi $(A'A)$ se consideră punctele M_1, N_1 şi respectiv P_1, iar pe muchiile (CB), (CD) şi (CC') se consideră punctele M_2, N_2 şi respectiv P_2. Notăm cu d_1 distanţa dintre dreptele M_1N_1 şi M_2N_2, cu d_2 distanţa dintre dreptele N_1P_1 şi N_2P_2, iar cu d_3 distanţa dintre dreptele P_1M_1 şi P_2M_2. Presupunem că distanţele d_1, d_2 şi d_3 sunt diferite două câte două. Arătaţi că dreptele M_1M_2, N_1N_2 şi P_1P_2 sunt concurente.

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.