Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pentru care

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Subiectul 2. a) Arătaţi că $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} > n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\min\left\{k \in \mathbb{N},\ k \geq 2;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > n\right\} > 2^n.$$

Subiectul 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ cu $|a_i| \leq 1$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

Arătaţi că $\sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i| \leq n$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq 1$.

Subiectul 4. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $C_1, C_2 \in (AB)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $A_1, A_2 \in (BC)$ astfel încât triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate.

Arătaţi că mulţimile $[A_1B_1] \cap [A_2B_2]$, $[B_1C_1] \cap [B_2C_2]$, $[C_1A_1] \cap [C_2A_2]$ sunt nevide.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.