

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VIII-A – SOLUȚII

Subiectul 1. Lungimile muchiilor tetraedrului sunt 1, 2, 3 sau 6. Fie A, B, C, D vârfurile tetraedrului și u măsura unghiului dintre muchia laterală și planul bazei. Dacă una dintre muchii, de exemplu AB , este 1, atunci una dintre fețe, de exemplu ABC este triunghi echilateral cu latura 1, altfel s-ar contrazice inegalitatea triunghiului. Celelalte 3 muchii vor avea lungimea 6, deci $ABCD$ este piramidă regulată cu vârful D 2 puncte

Piramida are înălțimea $\frac{\sqrt{321}}{3}$, deci $\sin u = \frac{\sqrt{321}}{18} > \frac{1}{2}$, de unde $u > 30^\circ$ 1 punct

Dacă niciuna dintre laturi nu este 1, atunci trei dintre muchii sunt egale cu 2, iar celelalte trei muchii sunt egale cu 3. 1 punct

Cel puțin două dintre muchiile cu un capăt în D sunt egale, de exemplu $DA = DC = 3$. Atunci $BA = BC = 2$. Dacă $AC = 3$, tetraedrul este piramidă regulată cu vârful B . Dacă $AC = 2$, tetraedrul este piramidă regulată cu vârful D 1 punct

Piramida cu muchiile bazei egale cu 2 și muchiile laterale egale cu 3 are înălțimea egală cu $\frac{\sqrt{69}}{3}$, deci $\sin u = \frac{\sqrt{69}}{9} > \frac{1}{2}$, de unde $u > 30^\circ$ 1 punct

Piramida cu muchiile bazei egale cu 3 și muchiile laterale egale cu 2 are înălțimea egală cu 1, deci $\sin u = \frac{1}{2}$, de unde $u = 30^\circ$ 1 punct

Subiectul 2. a) Notăm cu S numărul de *sucesiuni admisibile*. Există 5 cifre pare deci $5^4 = 625$ *sucesiuni* de 4 cifre pare..... 1 punct
 Există 5 *sucesiuni* cu toate cifrele egale. 1 punct
 Există $5 \cdot 4^2 = 80$ de *sucesiuni* cu exact 3 cifre egale. 1 punct
 Obținem $S = 625 - 5 - 80 = 540$ 1 punct
 b) Există n posibilități de a plasa *sucesiunea admisibilă* 2,0,0,8 ca linie în tablou. Fiecare din celelalte $n - 1$ linii se poate completa în $S - 1$ moduri. Obținem $d_n = n(S - 1)^{n-1} = n \cdot 539^{n-1}$ 1 punct
 Avem $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n + 1) \cdot 539}{n}$
 Atunci $\frac{d_{n+1}}{d_n} \in \mathbb{N}$ dacă $n \mid 539$, deci $n \in \{7, 11, 49, 77, 539\}$ 1 punct

Subiectul 3. Prin calcule obținem $2a^2b + 2ab^2 - 3a^2 - 3b^2 - 4ab + 3a + 3b \geq 0$ 1 punct
 Din ipoteză avem $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ 2 puncte
 Inegalitatea se scrie $2a(a - 1)(b - 1) + 2b(a - 1)(b - 1) + a(1 - a) + b(1 - b) \geq 0$, 3 puncte
 evident adevărată, ca sumă de numere pozitive. 1 punct

Subiectul 4. Notăm cu a lungimea muchiei cubului. Presupunem că, de exemplu, M_1N_1 nu e paralelă cu M_2N_2 și P_1N_1 nu e paralelă cu P_2N_2 . Înseamnă că $d_1 = d_2 = a$, contradicție. 1 punct
 Deducem că $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ sau $P_1N_1 \parallel P_2N_2$ 1 punct
 Dacă $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ și P_1N_1 nu e paralelă cu P_2N_2 , atunci $M_1P_1 \parallel M_2P_2$, altfel $d_2 = d_3 = a$ 1 punct
 Deci $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ și $P_1N_1 \parallel P_2N_2$ sau $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ și $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ 1 punct
 În fiecare caz rezultă că planele $(M_1N_1P_1)$ și $(M_2N_2P_2)$ sunt paralele. 1 punct
 Prin urmare, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $P_1N_1 \parallel P_2N_2$ și $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ 1 punct
 Cum dreptele M_1M_2 , N_1N_2 și P_1P_2 sunt necoplanare, dar concurente două câte două, rezultă că toate trei sunt concurente. 1 punct