Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A IX-A – SOLUŢII

Subiectul 1. Pentru $x = 0$ obţinem $f(f(y)) = y$ pentru orice $y \in \mathbb{N}$ ceea ce implică surjectivitatea funcţiei. .... 1 punct

Punem $x = 1$ în ecuaţia funcţională: $f(1 + f(y)) = f(1) + y$ şi pentru y înlocuit cu $f(x)$ deducem $f(1 + y) = f(1) + y$. .... 2 puncte

Prin inducţie rezultă din ultima relaţie $f(n) = nf(1)$. .... 2 puncte

Cum f este surjectivă obţinem $f(1) = 1$ (din relaţia de mai sus imaginea lui f este $f(1)\mathbb{N} = \{f(1)n \mid n \in \mathbb{N}\}$). .... 2 puncte

Subiectul 2. a) $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{2n-1}+1} + \frac{1}{2^{2n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right) > \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} = 2n \cdot \frac{1}{2} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. .... 2 puncte

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ mulţimea $\left\{k \in \mathbb{N},\ k \geq 2;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > n\right\}$ este nevidă (cf. a)) şi, fiind formată din numere naturale, admite un minim; fie acesta x_n. .... 1 punct

Demonstrăm că $x_n > 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, prin inducţie matematică:

- Pentru $n = 1$, avem: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$ şi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, deci $x_1 = 4 > 2^1$.
- Presupunem că $x_n > 2^n$ pentru un $n \geq 1$.

Deoarece $x_n > 2^n$, rezultă $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \leq n$.

Cum $\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2^n}{2^n+1} < 1$, $\forall n \geq 2$, prin adunare obţinem $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < n + 1$, de unde $x_{n+1} > 2^{n+1}$. .... 4 puncte

Subiectul 3. Putem presupune că $a_0 = -1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le 1 = a_{n+1}$. ....1 punct

Deoarece $|x| \le 1$, există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $a_k \le x \le a_{k+1}$. Atunci $E(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i| = kx - \sum\limits_{i=1}^{k} a_i + \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_j - (n-k)x$. ....2 puncte

Dar $2k \le n$, avem

$$E(x) = -nx + 2\sum_{i=1}^{k}(x - a_i) = n - \Big(n(1+x) - 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)\Big).$$

Dacă $1 + x \le 0$, iar $2\sum\limits_{i=1}^{k}(x - a_i) \le 2\sum\limits_{i=1}^{k}(1 + x) = 2k(1+x)$, deci $E(x) \le n - (n - 2k)(1 + x) \le n$. ....2 puncte

Analog se procedează dacă $2k \ge n$:

$$E(x) = nx + 2\sum_{j=k+1}^{n}(a_j - x) = n - \Big(n(1-x) - 2\sum_{j=k+1}^{n}(a_j - x)\Big)$$
$$\le n - (2k - n)(1 - x) \le n. \text{ ....2 puncte}$$

Se observă de altfel că $E(-1) = E(1) = n$.

Soluţie alternativă. Se poate verifica uşor că $E(x)$ este o "parabolă" convexă, liniară pe bucăţi, astfel încât maximul se obţine la extreme, unde $E(-1) = E(1) = n$.

Subiectul 4. Deoarece $\triangle A_1B_1C_1$ şi $\triangle A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate, rezultă

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}. \text{ ....1 punct}$$

Cum $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (CA)$, $C_1, C_2 \in (AB)$, există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = \beta\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2} = \gamma\overrightarrow{AB}$. ....1 punct

Obţinem $\alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{CA} + \gamma\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{CA} - \gamma(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\alpha - \gamma)\overrightarrow{BC} = (\gamma - \beta)\overrightarrow{CA}$. Dar vectorii $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CA}$ sunt necoliniari, deci

$(*)$ $$\alpha = \beta = \gamma. \text{ ....2 puncte}$$

Presupunem că $C_1 \in (AC_2)$. Din relaţia $(*)$ rezultă: $A_1 \in (BA_2)$ şi $B_1 \in (CB_2)$, de unde obţinem concluzia. ....2 puncte