

PROGRAMA OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ

CLASELE V–VIII

AN ȘCOLAR 2006/2007

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Cunoștințele suplimentare față de programa școlară, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

Clasa a V– a - Etapa locală

Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică.

Metoda comparației. Metoda grafică. Metoda falsei ipoteze. Metoda mersului invers. Probleme de mișcare. Probleme de perspicacitate și de numărare. Principiul cutiei (Principiul lui Dirichlet). Metoda reducerii la absurd.

Numere naturale

Factorul comun. Teorema împărțirii cu rest. Puteri. Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte. Sisteme de numerație. Divizibilitatea în \mathbf{N} .

Clasa a V–a - Etapa județeană (municipiul București)

Mulțimi. Operații cu mulțimi. Reuniunea. Intersecția. Diferența a două mulțimi. Produs cartezian.

Numere raționale pozitive

Ecuatii în \mathbf{Q} . Frații zecimale. Operații. Inecuații în \mathbf{N} și \mathbf{Q} . Probleme. Periodicitate. Media aritmetică .

Elemente de geometrie. Unități de măsură .

Clasa a VI–a - Etapa Locală

Aritmetică . Algebră

Numere naturale

Proprietățile divizibilității în \mathbf{N} .

Criteriile de divizibilitate cu: 2; 5; 10; 2^n ; 5^n ; 3; 9; 7; 11; 13. Numere prime și numere compuse.

Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ; $a;b=ab$. Numere prime între ele. a/bc și $(a,b)=1 \Rightarrow a/c$; (teorema lui Gauss).

$$(a;b) = d \Rightarrow \exists x, y \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } (x;y) = 1 \text{ și } a = xd; b = yd .$$

$$\text{Dacă } [a;b] = m \Rightarrow \exists x, y \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } (x;y) = 1 \text{ și } m = ax; m = by .$$

Rapoarte și Proporții.

Rapoarte. Proporții. Procente. Mărimi direct proporționale. Mărimi invers proporționale. Șir de rapoarte egale. Proporționalitate directă . Proporționalitate inversă .

Geometrie

Punct. Dreaptă . Semidreaptă . Segment (conținutul programei școlare).

Unghi (conținutul programei școlare și, în plus, teorema directă și teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf).

Congruența triunghiurilor (conținutul programei școlare și cazul L.U.U.)

Clasa a VI-a - Etapa Județeană (Municipiul București)

Aritmetică . Algebră

Numere întregi

Operații în \mathbf{Z} . Modulul unui număr întreg. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri.

Proprietățile divizibilității în \mathbf{Z} .

- 1) $a/a, \forall a \in \mathbf{Z}$
- 2) a/b și $b/c \Rightarrow a/c$
- 3) a/b și $b/a \Rightarrow a=b$ sau $a=-b$
- 4) $1/a$ și $-1/a, \forall a \in \mathbf{Z}$
- 5) $a/1$ sau $a/-1 \Rightarrow |a|=1$
- 6) $a/0, \forall a \in \mathbf{Z}$
- 7) $0/a \Rightarrow a=0$
- 8) $a/b \Leftrightarrow (-a)/b \Leftrightarrow a/(-b) \Leftrightarrow (-a)/(-b)$
- 9) $a/b \Rightarrow a/b \cdot c, \forall c \in \mathbf{Z}$
- 10) a/b_1 și $a/b_2 \Rightarrow a/(b_1 \pm b_2)$
- 11) a/b_1 și $a/b_2 \Rightarrow a/(b_1c_1 \pm b_2c_2)$, unde $c_1, c_2 \in \mathbf{Z}$
- 12) $a/b \Rightarrow a \cdot c/b \cdot c, \forall c \in \mathbf{Z}$
- 13) $a \cdot c/b \cdot c, c \neq 0 \Rightarrow a/b$
- 14) a_1/b_1 și $a_2/b_2 \Rightarrow a_1a_2/b_1b_2$

Numere raționale

Operații (inclusiv puterea unui număr rațional cu exponent număr natural). Ecuații și inecuații în $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$.

Rapoarte și Proporții. Probabilități.

Geometrie

Perpendicularitate (conținutul programei școlare).

Paralelism (conținutul programei școlare și, în plus, teorema directă și teorema reciprocă a liniei mijlocii a unui triunghi).

Proprietăți ale triunghiurilor (conținutul programei școlare) și următoarele teoreme:

- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea catetei care se opune unghiului de 30° este jumătate din lungimea ipotenuzei. Teorema reciprocă .

- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei. Teorema reciprocă .

Clasa a VII-a - Etapa Locală

Algebră

Mulțimea numerelor întregi.

Mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea numerelor reale.

Modulul unui număr real. Proprietăți.

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real.

Reguli de calcul cu radicali.

Geometrie

Patrulatere.

Probleme de coliniaritate. Probleme de concurență.

Asemănarea triunghiurilor.

Clasa a VII-a - Etapa Județeană (Municipiul București)

Algebră

Mulțimea numerelor întregi

Mulțimea numerelor raționale

Mulțimea numerelor reale

Modulul unui nr. real. Proprietăți:

$$a) |x| \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}; b) |x| = \max(-x; x), \forall x \in \mathbf{R};$$

$$c) |xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbf{R};$$

$$d) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}^*; e) |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R};$$

$$f) |x| \leq a \ (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$$

$$g) |x| \geq a \ (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \geq a \text{ sau } x \leq -a; h) \sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real.

Reguli de calcul cu radicali (conținutul programei școlare).

- a) Dacă $a \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$; b) Dacă $a, b \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$;
- c) Dacă a și b nu sunt pătrate ale unor numere raționale, atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$; d) Dacă $a, b \in \mathbf{Q}^*$ și $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât, atunci $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbf{Q}^*$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$; e) Dacă $a, b \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci $a \pm \sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și $a\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; f) Dacă $a \in \mathbf{Q}^*$ și $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci $a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și $ab \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;
- g) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ și $c^2 = a^2 - b$ (formula radicalilor dubli).

Calcul algebric

Calcule cu numere reale reprezentate prin litere (conținutul programei școlare);

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \quad \forall a, b \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N};$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad \forall a, b \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N}, n \text{ impar};$$

$$(a+b)^n = M_a + b^n, \text{ unde } a, b \in \mathbf{Z}, \text{ și } n \in \mathbf{N}^* ;$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ (identitatea lui Lagrange)}$$

Geometrie

Patrulatere (conținutul programei școlare).

Probleme de coliniaritate. Probleme de concurență .

Asemănarea triunghiurilor

Teorema lui Thales. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales. Teorema paralelelor echidistante. Teorema paralelelor neechidistante. Linia mijlocie în triunghi; proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi; proprietăți. Linia mijlocie în trapez; proprietăți. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Teorema bisectoarei (interioare, exterioare) și teorema reciprocă . Teorema lui Menelaos; teorema reciprocă . Teorema lui Ceva; teorema reciprocă

Clasa a VII-a - Etapa Națională

Algebră

Inegalități. Sume. Probleme de maxim și de minim.

- $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbf{R}$; 2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbf{R}$; 3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;
 $\forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$;

$$4. \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \forall a_i \in \mathbf{R}_+, i = \overline{1, n}$$

și $\forall n \in \mathbf{N}^*$ (inegalitatea mediilor);

$$5. (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n} \text{ și}$$

$\forall n \in \mathbf{N}^*$ (inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz).

Ecuatii. Probleme.

Geometrie

Relații metrice în triunghi

În triunghiul dreptunghic: teorema înălțimii; teorema catetei; teorema lui Pitagora; teoreme reciproce.

Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic: sin, cos, tg, ctg.

Teorema lui Pitagora generalizată . Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor. Teorema medianei:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} . \text{ Arii. } A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; A_{\Delta} = \frac{ab \sin C}{2}; A_{\Delta} = pr; A_{\Delta} = \frac{abc}{4S};$$

$$A_{\text{patratul.convex}} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin[\angle(d_1, d_2)]}{2} .$$

Clasa a VIII-a - Etapa Locală

Algebră

Numere reale: Partea întregă și partea fracționară. Ecuatii. Modulul unui număr real . Ecuatii. Intervale. Intersecția și reuniunea intervalelor.

Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ și $a \pm \sqrt{b}, a, b \in \mathbf{N}$.

Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori.

Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operații.

Geometrie

Cercul.

Inegalități geometrice. Probleme de maxim și minim.

Probleme elementare de loc geometric.

Puncte, drepte, plane.

Paralelism; Teoreme de paralelism.

Dreapta perpendiculară pe un plan; Distanța de la un punct la un plan; Simetria față de un plan; Secțiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

Proiecții ortogonale pe un plan.

Clasa A VIII-A - Etapa Județeană (Municipiul București)

Algebră

Numere reale

Partea întregă și partea fracționară a unui număr real. Ecuatii. Modulul unui număr real. Ecuatii.

Intervale. Intersecția și reuniunea intervalelor. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ și i

$a \pm \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbf{N}$. Formulele de calcul prescurtat:
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operații.

Geometrie

Cercul

Definiție. Elemente în cerc. Unghi la centru. Măsura arcelor. Coarde și arce; proprietăți. Teorema unghiului înscris în cerc. Cerc înscris, cerc circumscris unui triunghi. Patrulater ortodiagonal. Patrulater înscriptibil. Patrulater circumscriptibil. Condiții de înscriptibilitate, condiții de circumscriptibilitate. Cercul lui Euler. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri. Teorema arcului capabil de un unghi dat. Poligoane regulate. Lungimea cercului și a arcului de cerc. Aria discului și a sectorului de cerc.

Inegalități geometrice. Probleme de maxim și de minim.

Inegalitatea triunghiului. Într-un triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare, și reciproc. Teorema perpendiculararelor și a oblicelor.

Construcții simple cu rigla negradată și cu compasul.

Probleme elementare de loc geometric.

Puncte, drepte, plane. Paralelism.

La conținutul programei școlare se adaugă : teoreme de paralelism; teorema lui Menelaos în spațiu; teorema reciprocă teoremei lui Menelaos; teorema lui Thales în spațiu; axe de simetrie ale paralelipipedului dreptunghic; axa de simetrie a piramidei patrulater regulate; simetria față de un plan; secțiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

Proiecții ortogonale pe un plan

La conținutul programei școlare se adaugă : perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremei celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector.

Clasa aVIII-a – Etapa națională

Algebră

Funcții-conținutul programei școlare.

Geometrie

Calcul de arii și volume (prisma, piramida, trunchiul de piramidă)—conținutul programei școlare

Notă :

1. La toate etapele olimpiadei de matematică (locală , județeană , națională), autorul problemelor din concurs va utiliza conținutul prezentei programe pentru olimpiadă .

2. Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme (fără demonstrație): teorema lui Steiner, teorema lui Ptolemeu, teorema lui Fermat și principiul inducției matematice etc. conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de corectare.